882. Algebra ニ於ケル Arithmetik ニツイテ II

浅野　啓三（阪大）

§3

前号ノ論文デ einfache Algebra $\mathfrak{r}$ ノ中デ Arithmetik ガ定義サレテ居ルナラバ，$\mathfrak{r}$ ノ Zentrum K ノ中デモ Arithmetik ガ成立シ，$\mathfrak{r}$ ニ於テ與ヘラレタル Arithmetik ハコノ K ノ Arithmetik ヲ拡張シタモノデアルコトヲ示シタ。証明中 $\mathfrak{r}$ ノ Maximalordnung ヲ大文字 $\mathfrak{O}$ デ示シ，$\mathfrak{O}$ ト K ノ共通分 $[\mathfrak{O}, K]$ ヲ小文字 $\mathfrak{o}$ デ示シタノデアッタガ、印刷デハ両者ノ区別ガ出来テ居ラズ，大変見苦シイコトニナッテシマッタ。§2 ニ於テハ $\mathfrak{r}$ ニ於ケル Ideal ハドイツ大文字，K ニ於ケル Ideal ハドイツ小文字ト云フコトニ訂正スル。

$\mathfrak{r}$ ヲ Körper K ノ上ノ normal-einfache algebra トスル。$\mathfrak{r}$ ノ Teilring $\mathfrak{O}$ ガ 1 ヲ含ミ, 且ツ $\mathfrak{r}$ ノ任意ノ元 x ニ對シ, $x\alpha \in \mathfrak{O}$ トナル $[\mathfrak{O}, K]$ ノ元 $\alpha \neq 0$ ガ存在スレバ $\mathfrak{O}$ ハ勿論 $\mathfrak{r}$ ノ Ordnung デアル。今 Ordnung ガ此ノヤウナ強イ條件ニ從フモノトスルト次ノ事實ガ成立スル。

定理 $\mathfrak{r}$ ニ於ケル zweiseitige $\mathfrak{O}$-Ideale ガ群ヲナスナラバ,[1] $I = [\mathfrak{O}, K]$ ニ於テ普通ノ Arithmetik ガ成立シ, $\mathfrak{O}$ ハ I ニ關シ algebraisch ganz ナル $\mathfrak{r}$ ノ元ヨリナル maximaler Ring デアル。

(證明) 1°. K ハ I ノ Quotientenkörper デアル。

2°. I ニ於テ普通ノ Arithmetik ガ成立スルナラバ上ノ定理ハ成立スル. I ニ關シ alg. ganz ナル $\mathfrak{r}$ ノ元ヨリナル Maximalordnung ノ一ツヲ $\mathfrak{O}^*$ トスレバ, $\mathfrak{O}\mathfrak{O}^*$ ハ $\mathfrak{O}$-Linksideal デアッテ $\mathfrak{O}\mathfrak{O}^*\lambda \subseteq \mathfrak{O}$ トナル I ノ元 λ ガ存在スル。$\mathfrak{O}\mathfrak{O}^*$ ノ Rechtsordnung ヲ $\mathfrak{O}_1$ トスレバ $\mathfrak{O}_1 \supseteq \mathfrak{O}^*$. 又

---

(1) $\mathfrak{r}$ ニ於ケル z. $\mathfrak{O}$-Ideal ガ群ヲナス爲メノ條件ハ

I $\mathfrak{O}$ ガ Maximalordnung

II $\mathfrak{O}$ ニ含マレル z. $\mathfrak{O}$-Ideal ニ關スル Teilerkettensatz.

III $\mathfrak{O}$ ノ Primideal ハ (zweiseitig) teilerlos.

$$\mathfrak{o}_1 \subseteq \mathfrak{o}\mathfrak{o}^*\mathfrak{o}_1 = \mathfrak{o}\mathfrak{o}^* \qquad \mathfrak{o}_1\lambda \subseteq \mathfrak{o}$$

$$\mathfrak{o}\mathfrak{o}^*\lambda\mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{o}\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_1 \qquad \lambda\mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{o}_1$$

前論文33ノ頁ト同様ニシテ $\mathfrak{o}_1 \neq \mathfrak{o}^*$ ナラバ $\mathfrak{o} \supset \mathfrak{P}^{-1}$ トナルIノPrimideal $\mathfrak{P}$ が存在スル。

$$I = [\mathfrak{o}^*, K] \subseteq [\mathfrak{o}_1, K] = I_1$$

然ルニ $\mathfrak{o}_1\lambda \subseteq \mathfrak{o}$ ヨリ $[\mathfrak{o}_1\lambda, K] \subseteq [\mathfrak{o}, K]$，即チ

$$I_1\lambda \subseteq I$$

従ッテ $\mathfrak{o}I_1$ ハ $\mathfrak{o}$ ト äquivalent ナ Ordnung ヲナシ，$\mathfrak{o}I_1 = \mathfrak{o}$，$I_1 \subset \mathfrak{o}$，$I_1' \subseteq I$ トナル．ヨッテ $I = I_1$.
故ニ

$$\mathfrak{o}_1 \supset \mathfrak{P}^{-1} \text{ ヨリ } I \supseteq \mathfrak{P}^{-1}$$

トナッテ矛盾ヲ生ズル。

3°. $\mathfrak{p}$ ヲ $\mathfrak{o}$ ノ Primideal トスル．$\mathfrak{p}$ ト Prim ナル ganzes z. $\mathfrak{o}$-Ideal $\mathfrak{c}$ ヲ適當ニ取レバ

$$\mathfrak{c}a \subseteq \mathfrak{o} \text{ (従ッテ又 } a\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{o})$$

トナル如キ $\mathfrak{r}$ ノ元 a ノ全体ヲ $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ トスル。$\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ ハ $\mathfrak{r}$ ノ Ordnung デ $\mathfrak{r}$ ニ於ケル zweiseitiges $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$-Ideal ハ群ヲナス。又 $[K, \mathfrak{o}_\mathfrak{p}]$ ハ Hauptidealring $I_\mathfrak{p}$ ヲ作ル。

以下334—345頁ニ於ケルト同様ニシテ定理ガ証明サレル。

上ノ定理ヨリ

定理 $\mathfrak{r}$ ヲ algebra トシ，$\mathfrak{o}$ ヲ $\mathfrak{r}$ ノ任意ノ元 x ニ對シ $x\alpha \in \mathfrak{o}$ トナル $\mathfrak{o}$ ノ Zentrum ニ屬ス

ル正規元 x が存在スル如キ $\mathfrak{J}$ ノ Ordnung トスル。$\mathfrak{J}$ ニ於ケル zweiseitiges $\mathfrak{O}$-Ideal が群ヲナスナラバ，此ノ群ヲ gruppoid ニ迄拡張シテ $\mathfrak{J}$ ノ Arithmetik ヲ定義スルコトが出来ル。

§ 4

可換体 L が部分体 K ノ有限次拡大体ナルトキ，L ニ於テ Arithmetik が定義サレテ居テモ，K ニ於テハ必ズシモ Arithmetik が成立シナイコトハ中山君ノ注意サレテ居ル通リデアル．L ニ於テ $\mathfrak{O}$ ヲ Maximalordnung トシテ Arithmetik が成立シ，且ツ K ニ於テ $I = [K, \mathfrak{O}]$ ヲ Maximalordnung トシテ Arithmetik が成立スル場合デモ，$\mathfrak{O}$ が I ニ関シテ alg. ganz ナル L ノ元ヨリ成ルトハ限ラナイ。若シ I ニ於テ普通ノ Arithmetik が成立シ，且ツ $\mathfrak{O}$ が I ニ関シ alg. ganz ナル L ノ元全体ヨリ成ルナラバ，L ヲ含ム K ノ上ノ最小 galois 拡大体ヲ L^* トシ，L^* ノ元デ $\mathfrak{O}$ ニ関シ alg. ganz ニナルモノノ全体ノ $\mathfrak{O}^*$ トスレバ，$\mathfrak{O}^*$ ハ K ニ関シ alg. ganz ナル L^* ノ元ノ全体デアリ，且ツ $\mathfrak{O}^*$ ニ於テモ普通ノ Arithmetik が成立スル．(コノトキ L/K ハ separabel デモ inseparabel デモヨイ) 又 L^*/K ノ凡テノ Automorphismus S ニヨッテ $\mathfrak{O}^{*S} = \mathfrak{O}^*$ トナル．コレハ周知ノ事デアルが，更ニコノ逆ノ事実が成立スル．上ヘ拡張スル方ハ常ニ可能

デアルカラ L/K ガ galoissch ノ場合ニ証明スレバヨイ。即チ

$L \supset K$
$\mathfrak{O} \supset I$ $I = [\mathfrak{O}, K]$, L ハ $\mathfrak{O}$ ノ Quotientenkörper

トシ, L/K ガ galoissch (separabel od. inseparabel) デ L/K ノ任意ノ Automorphismus S ニヨツテ $\mathfrak{O}^S = \mathfrak{O}$ トナルモノトスル。$\mathfrak{O}$ ニ於テ普通ノ Arithmetik ガ成立スレバ I ニ於テモサウデアリ, 且ツ $\mathfrak{O}$ ハ I ニ関シ alg. ganz ナル L ノ元全体ヨリ成ル。

（証明）1° K ハ I ノ Quotientenkörper デアル。

$a \in K$ トスレバ $a\alpha \in \mathfrak{O}$ トナル $\mathfrak{O}$ ノ元 α ガ存在スル。α ノ共軛 $\alpha', \alpha'', \cdots\cdots, \alpha^{(n-1)}$ ハ $\mathfrak{O}$ ニ属スル。（L/K ガ inseparabel ノ時ハ適当ニ重複サセル）。故ニ

$$a\alpha\alpha'\cdots\cdots\alpha^{(n-1)} = ab \in \mathfrak{O}, \quad b \in [\mathfrak{O}, K] = I$$

$$c = ab \in I, \quad a = \frac{c}{b}$$

2°. K ノ I-Ideale ハ群ヲナス。

$\mathfrak{a}$ ヲ任意ノ I-Ideal トスル。

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{a}\mathfrak{O})^{-1} = (\mathfrak{a}\mathfrak{O})(\mathfrak{a}\mathfrak{O})^{-1} = \mathfrak{O}$$

故ニ $a_1\alpha_1 + \cdots\cdots + a_r\alpha_r = 1$, $a_i \in \mathfrak{a}$ $\alpha_i \in (\mathfrak{a}\mathfrak{O})^{-1}$

$$1 = \prod_{i=0}^{n-1}\left(a_1\alpha_1^{(i)} + \cdots\cdots + a_r\alpha_r^{(i)}\right) = \sum c_{\nu_1\cdots\cdots\nu_r} a_1^{\nu_1}\cdots\cdots a_r^{\nu_r}$$

$\mathfrak{p}$ ヲ $\mathfrak{O}$ ノ Primideal トシ, zu $\mathfrak{p}$ ganz ナル L ノ元ノナス整域ヲ $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}$ トシ, $I_{\mathfrak{p}} = [K, \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}]$ トスル。

$I_{\mathfrak{p}}$ハ $\mathfrak{p}$-adische Bewertung ニ関シ ganz ナルKノ元ノナスRingデアルカラ例ハ普通ノArithmetik ガ成立スル。

$\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}=\mathfrak{a}I_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{O}^{*}=\mathfrak{O}I_{\mathfrak{p}}$ トオク。

$\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{-1}\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}=I_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}\mathfrak{O})^{-1}I_{\mathfrak{p}}=\mathfrak{O}^{*}$,

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{O})^{-1}I_{\mathfrak{p}}=\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{-1}\mathfrak{O}^{*}$$

$$I_{\mathfrak{p}}\subset\mathfrak{O}^{*}\subseteq\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}},\quad I_{\mathfrak{p}}\subseteq[\mathfrak{O}^{*},K]\subseteq[\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}},K]=I_{\mathfrak{p}}$$

故ニ $[\mathfrak{O}^{*},K]=I_{\mathfrak{p}}$

$$\alpha_{\nu}\in(\mathfrak{a}\mathfrak{O})^{-1}\subseteq\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{-1}\mathfrak{O}I_{\mathfrak{p}},\quad \alpha_{\nu}^{(i)}\in\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{-1}\mathfrak{O}I_{\mathfrak{p}}$$

$$c_{\nu_1\cdots\cdots\nu_r}\in\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{-n}\mathfrak{O}^{*}\ \text{且}\in K$$

$$c_{\nu_1\cdots\cdots\nu_r}\in[\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{-n}\mathfrak{O}^{*},K]=\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{-n}\ {}^{(2)}$$

コレヨリ $D_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{-n})\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{n}=I$ トナリ, $\mathfrak{a}$ハ umkehrbar ニナル。

3°. $\mathfrak{O}$ハ I ニ関シ alg. ganz ナル L ノ元全体ヨリ成ル。

I ニ関シ alg. ganz ナル L ノ元全体ヲ $\mathfrak{O}^{*}$ トスル。

明カニ

---

(2) $[\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{-n}\mathfrak{O}^{*},K]\supseteq\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{-n}$, $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{n}[\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{-n}\mathfrak{O}^{*},K]\subseteq[\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{n}\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{-n}\mathfrak{O}^{*},K]$

$\subseteq[\mathfrak{O}^{*},K]=I_{\mathfrak{p}}$

ヨッテ $[\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{-n}\mathfrak{O}^{*},K]\subseteq\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{-n}$

$$I \subset \mathfrak{O}^* \subseteq \mathfrak{O}$$

$\mathfrak{O}$ キ $\mathfrak{O}^*$ トハルト、$\mathfrak{O}$ ハ $\mathfrak{O}^*$ ト異ル ganzes $\mathfrak{O}^*$-Ideal ノ逆 $\mathfrak{a}^{*-1}$ ヲ有スル。L/K ガ separabel ナラバ $\mathfrak{a}^{*-1}$ ノ共軛ハ皆 $\mathfrak{O}$ ニ含マレ、従ッテ

$$\mathfrak{O} \supset N(\mathfrak{a}^{*-1}) = N(\mathfrak{a}^*)^{-1} = \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{O}^*$$

$$I \supset \mathfrak{a}^{-1} \ (\mathfrak{a}^{-1} \text{ nicht ganz})$$

トナリ矛盾ヲ生ズル。L/K ガ rein inseparabel ノ時ハ

$$\mathfrak{a}^{*m} = (\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_r)^m = (\alpha_1^m, \cdots\cdots, \alpha_r^m)$$

ヨリ $\mathfrak{a}^*$ ノ適當ナ素數冪ガ I-Ideal カラ生成サレルコトガ分リ、同様ナ結果ニ達スル。一般ノ場合ハコレヲ組合スレバヨイ。